

Révisions

I) Probabilités

Probabilités et algèbre linéaire

Dénombrement

Exercice 1 Calculer $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i}$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Dénombrer le nombre de triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $x + y + z = n$.
2. Dénombrer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + y + z = n$.

Exercice 3 ★ On note $p(n)$ le nombre de partitions de n pour $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire n comme une somme d'entier (sans prendre en compte l'ordre des sommandes).

1. Montrer que $p(n) \leq 2^{n-1}$.
2. Montrer que, pour $n \geq 2$, $p(n) \geq 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$

Probabilités

Exercice 4 On lance 5 dés. Quelle est la probabilité que 6 soit le plus petit résultat? Que 5 soit le plus petit résultat? Que 1 soit le plus petit résultat?

Exercice 5 Soit n un entier naturel non nul. Camille lance une pièce de monnaie qui amène pile avec la probabilité $a \in]0,1[$. Elle marque un point si elle obtient pile et marque deux points si elle obtient face. Le jeu s'arrête dès qu'elle atteint ou dépasse n points. On note p_n la probabilité qu'elle marque exactement n points.

1. Calculer p_1 et p_2 .
2. Montrer : $\forall n \geq 1, p_{n+2} = a p_{n+1} + (1-a) p_n$.
3. Sans mener les calcul, expliquer comment en déduire une expression de p_n en fonction de n et de a .

Exercice 6 Quatre urnes numérotées de 1 à 4 contiennent chacune le même nombre total $B \geq 4$ de boules blanches et noires. L'urne U_i contient i boules noires (et donc $B - i$ boules blanches). On commence par choisir une urne, l'urne U_i ayant une probabilité $\frac{i}{10}$ d'être choisie, puis on tire au hasard une boule dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit noire?
2. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit U_1 sachant que la boule tirée est noire?

Exercice 7 On considère une urne contenant $n \geq 1$ BB et n BN. On tire les boules 2 par 2 jusqu'à ce que l'urne soit vide. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et une boule noire au i -ème tirage?

Exercice 8 Une urne contient b BB et n BN. On tire m boules en remettant à chaque tirage la boule tirée si celle-ci est noire, en ne la remettant pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule blanche à l'instant k ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche?
3. La 2ème boule est noire. Quelle est la probabilité que la 1ère ait été blanche?

Exercice 9 ★ Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables ind. de même loi uniforme sur $\llbracket 1, d \rrbracket$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Soient Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r[d]) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}(\omega^{kY})$.
2. Pour $r \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r[d])$, puis déterminer la limite de $\mathbf{P}(S_n \equiv 0[d])$.

Espérance

Exercice 10 Montrer que si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k)$.

Exercice 11 On lance r boules dans n paniers. On s'intéresse à l'espérance du nombre N de paniers non vides.

1. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note P_i l'évènement «Le i -ème panier est non vide». Que vaut $\mathbf{P}(P_i)$?
2. En déduire l'espérance de N , et la limite de celle-ci quand $n \rightarrow +\infty$.

Inégalités

Exercice 12 Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

Exercice 13 Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 14 ★ Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que U_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, pour $p \in]\frac{1}{2}, 1[$. On considère $X_n = 2U_n - n$.

1. En comparant, pour $s \geq 0$, $\mathbf{P}(X_n \leq 0)$ et $\mathbf{E}(e^{-sX_n})$, montrer que $\mathbf{P}(X_n \leq 0) \leq \left(2\sqrt{p(1-p)}\right)^n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \min(0, X_1, \dots, X_n)$. Montrer que $\frac{\mathbf{E}(Z_n)}{n} \rightarrow 0$.

Exercice 15 INÉGALITÉ DE PALEY-SIGMUND Soit X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que pour $\lambda \in]0,1[$,

$$\mathbf{P}(X \geq \lambda \mathbf{E}(X)) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

Théorème de Weierstrass

Exercice 16 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $x \in [0, 1]$, et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même $\mathcal{B}(x)$. On note : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$; $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = \mathbf{E}(f(Z_n))$.

1. Rappeler la loi de S_n . En déduire $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall \alpha > 0, \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbf{P}(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

3. Justifier que $B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (f(\frac{k}{n}) - f(x))$.
4. En déduire que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

II) Algèbre linéaire

Exercice 17 Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Exercice 18 Montrer que $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 19 Montrer que si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E , $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 20 ★ Soit F un sous-espace de $\mathcal{K}[X]$ de dimension finie $p \geq 1$

1. Montrer que F admet une base formée de polynômes ayant des degrés deux à deux distincts.
2. Quel est le cardinal de l'image de $F \setminus \{0\}$ par la fonction degré ?
3. F admet-il une base formée de polynômes ayant tous le même degré ?

Exercice 21 Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie.

1. Montrer que $\text{rang}(f+g) \leq \text{rang } f + \text{rang } g$.
2. Montrer que $\text{rang } g = \text{rang}(f \circ g) + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } g)$.

Exercice 22 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que les suites $(\text{Ker } u^k)_{k \geq 0}$ et $(\text{Im } u^k)_{k \geq 0}$ sont d'abord strictement monotones pour l'inclusion puis stationnaires à partir d'un même rang $p \leq n$.
2. Retrouver cela en montrant que la suite $d_k = \dim \text{Ker } u^{k+1} - \dim \text{Ker } u^k$ est décroissante.

Exercice 23 Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 2], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid \forall k \in \llbracket -2, 2 \rrbracket, f(k) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel. Est-il de dimension finie ?
2. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[-2, 2]$ de degré au plus 4 est un supplémentaire de F dans E .

Exercice 24 Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

Exercice 25 Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im } p \circ q = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.
3. Montrer que $\text{Ker } p \circ q = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

Exercice 26 ★ Montrer que deux hyperplans quelconques d'un espace vectoriel E sont toujours isomorphes.

Exercice 27 ★ Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(G_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n P^{(n)}$.
2. Expliciter (G_n) pour φ vérifiant : $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^x P(t) dt$.
3. On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que, pour tout $P \in E, \varphi(P) = QP'$.

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que χ_A est unitaire de degré n .
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(A) = O_n$.
3. Soit P un tel polynôme de degré d . Montrer que $\text{Vect}(A^k)_{k \in \mathbb{N}} = \text{Vect}(A^k)_{k \leq d}$.

L'objectif est de montrer que χ_A est un polynôme annulateur de A , c'est-à-dire $\chi_A(A) = O_n$.

4. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$ tel que $\chi_A I_n = P(XI_n - A)$.
5. Soit $\mathcal{A}$ un anneau non commutatif, $P, Q \in \mathcal{A}[X]$ et $a \in \mathcal{A}$ qui commute avec tous les coefficients de P et Q .
Vérifier que $(PQ)(a) = P(a)Q(a)$.

Ceci n'est pas vrai en général sans l'hypothèse de commutativité.

6. En déduire que $\chi_A(A) = O_n$.